Il calore nella Finanza

Franco Moriconi
Università di Perugia – Facoltà di Economia

Perugia, 12 Novembre 2008

Quotazioni FIAT – Serie giornaliera dal 6/11/2007 al 6/11/2008

1. Quale modello per il processo del prezzo?

- $X(t),\ t \geq 0$: prezzo di una azione A al tempo t.

· Fissato t, $X(t)$ è una **variabile aleatoria** (v.a.);

· come funzione di t, $X(t)$ è un **processo stocastico**.

- **Modello Gaussiano (Normale)**

$\forall\, t$, $X(t)$ è **normale** con media $X(0) + \mu\, t$ e varianza $\sigma^2\, t$.
Cioè :

$$\forall\, t \geq 0\,, \quad X(t) - X(0) \sim \mathcal{N}\big(\mu\, t, \sigma^2\, t\big)\,.$$

· μ : parametro di *drift* (media per unità di tempo, "velocità media"),
· σ^2 : parametro di *diffusione* (varianza per unità di tempo).

Giustificazione del modello: **teorema del limite centrale** (?)

Se, per ogni t, $X(t)$ è **normale** con media $X(0) + \mu\, t$ e varianza $\sigma^2\, t$

$\Longrightarrow$

per qualunque discretizzazione di $[0, t]$ in n intervalli $\Delta t = t/n$, si ha:

$$X(t) = X(0) + \sum_{k=1}^{n} \Delta X_k\,, \quad \text{con} \quad \Delta X_k \sim \mathcal{N}\big(\mu\, \Delta t, \sigma^2\, \Delta t\big) \;\text{ e }\; \textbf{indipendenti}.$$

- Rappresentazione tramite "equazione alle differenze stocastica":

$$\begin{cases} X(0) = X_0\,, \\ \Delta X_k = \mu\, \Delta t + \sigma\, \sqrt{\Delta t}\, \varepsilon_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \end{cases}$$

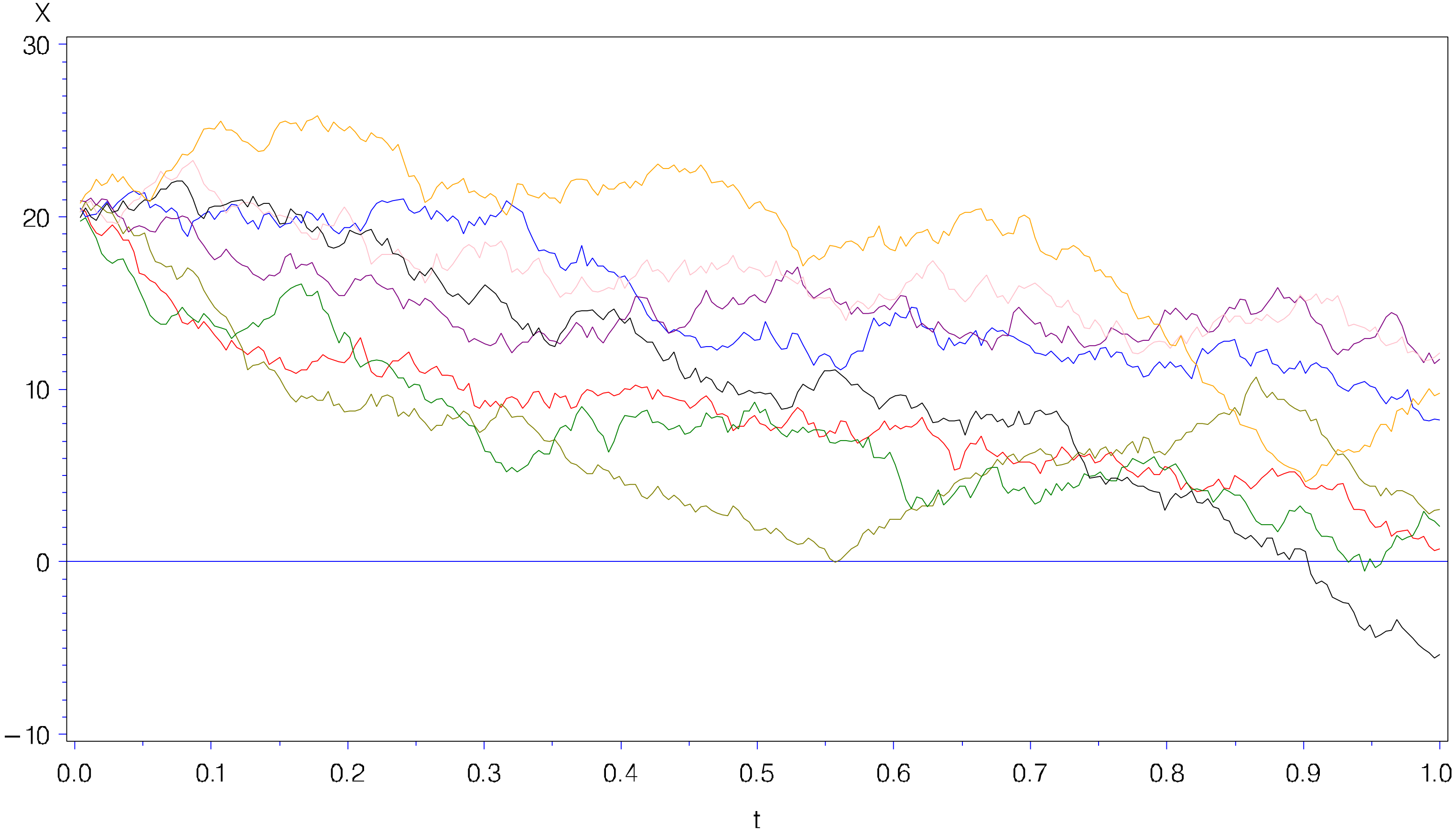
con $\varepsilon_k \sim \mathcal{N}\big(0, 1\big)$ indipendenti.

$\Longrightarrow$ **simulazione Monte Carlo** (tipicamente, μ e σ sono **stimati** sui dati).

Esempio di simulazione.

Dalla serie storica FIAT 6/11/2007-2008: $X_0 = 20.78\,, \quad \mu = -14.49\,, \quad \sigma = 105.64\,.$

Modello gaussiano



Nel tempo continuo

Equazione differenziale stocastica (eds):

$$\begin{cases} X(0) = X_0\,, \\ dX(t) = \mu\, dt + \sigma\; dB(t)\,, \end{cases}$$

con: $dB(t) \sim \mathcal{N}\big(0, \sqrt{dt}\big)$ indipendenti.

· $B(t)$ è il **Moto Browniano Standard** (MBS)$^{(*)}$;

· $dB(t)$ è l'incremento infinitesimo del MBS (differenziale stocastico).

Si può anche scrivere:

$$X(t) = X(0) + \mu\, t + \sigma\, B(t)$$

$\longrightarrow$ $X(t)$ come trasformazione lineare del MBS: **Moto Browniano Lineare** (MBL), MB con drift.

$(*)$ Robert Brown, 1827 $\longrightarrow$ movimento caotico di particelle sospese in liquido o gas.
Albert Einstein, 1905: delineato un modello stocastico per il moto Browniano.
Louis Bachelier, 1900: anticipato l'approccio BM alla teoria dei prezzi di borsa.

Perché passare al continuo?

Le transazioni (e i prezzi) sono rilevate nel tempo continuo.

Quotazioni intraday FIAT – 6/11/2008

Proprietà del Moto Browniano

· $B(t)$ ha traiettorie continue

· $B(t)$ ha incrementi indipendenti e normali

· $B(t) \sim \mathcal{N}\big(0, t\big)$

· $B(t)$ **non è derivabile** (varia per "punti angolosi"):

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta B(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{\Delta t}\ \varepsilon_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{\Delta t}} = \pm\infty\,.$$

La continuità consente di ipotizzare una "prevedibilità locale" della traiettoria.
La non-derivabilità esclude questa possibilità.

$\Longrightarrow$ Le strategie deterministiche "*buy low, sell high*" non funzionano!

Dato che $B(t)$ non è derivabile, $dB(t)$ è un differenziale in senso atipico

$\Longrightarrow$ riscrivere le regole del calcolo differenziale $\rightarrow$ **calcolo differenziale stocastico**.

($dB(t)/dt$: "*rumore bianco*", ma la definizione di derivata è soltanto formale).

Il modello standard per i prezzi stocastici

Il modello normale consente valori negativi dei prezzi futuri!

- **Il modello lognormale**

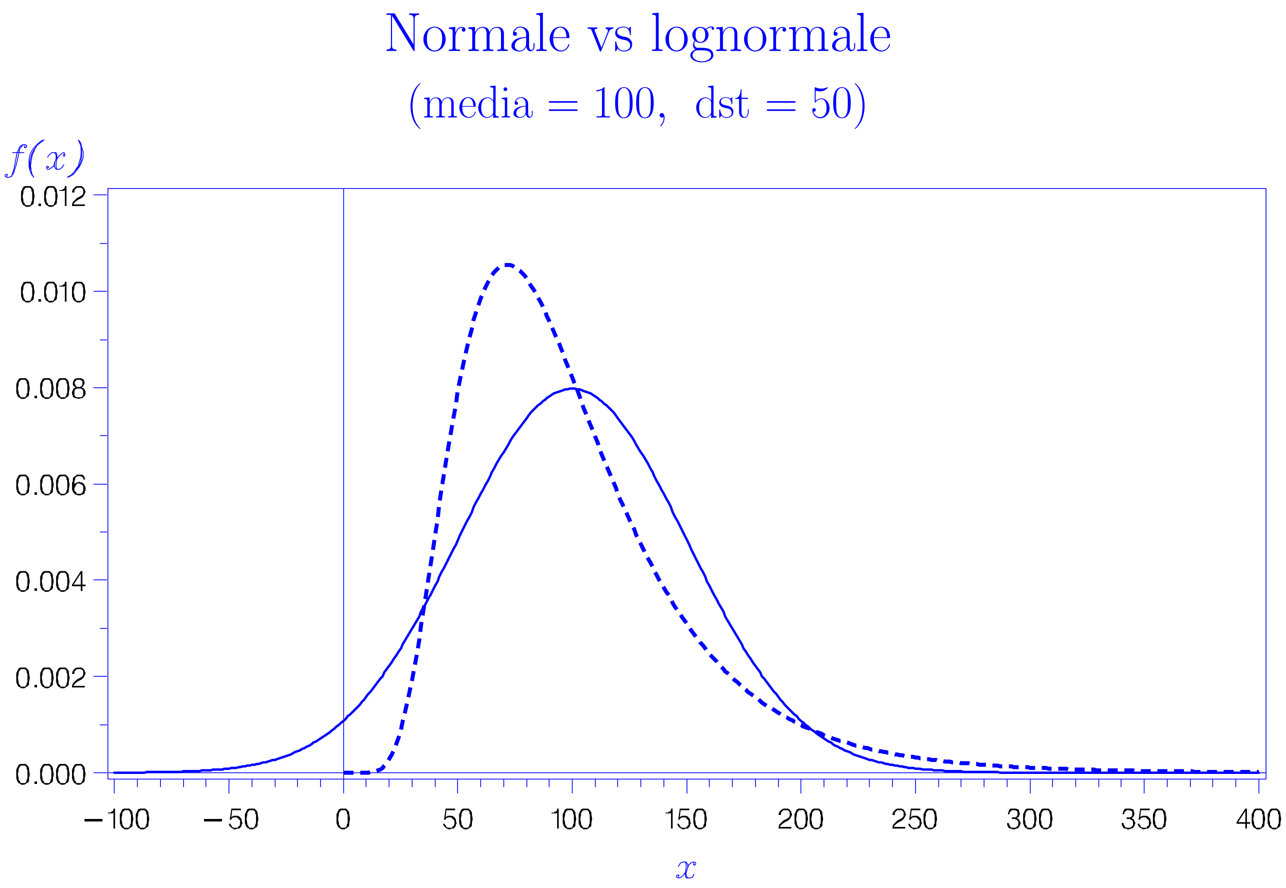
$$X(t) = X(0)\, e^{\mu\, t + \sigma\, B(t)}$$

$\rightarrow$ $X(t)$ come trasformazione esponenziale del MBS: **Moto Browniano Geometrico** (MBG).

Corrisponde all'e.d.s.:

$$dX(t) = \mu\, X(t)\, dt + \sigma\, X(t)\, dB(t)$$

La distibuzione caratteristica è la distribuzione **lognormale** $\rightarrow$ i prezzi non possono diventare negativi.



Si perde la proprietà di indipendenza degli incrementi, ma il processo $X(t)$ è comunque un **processo di Markov**:

in t la distribuzione di $X(t+\tau)$ per $\tau > 0$ dipende solo dal valore corrente $X(t)$ e non dai valori passati: "il futuro dipende dal passato tramite il presente"

Il MBG è una versione stocastica delle leggi di evoluzione esponenziali ("crescita a tasso costante").
Se si considera l'incremento percentuale infinitesimo:

$$R(t) = \frac{dX(t)}{X(t)}\,,$$

si ha che $R(t)$ è un MB lineare con drift:

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu\, dt + \sigma\, dB(t).$$

In finanza $R(t)$ è il *(tasso istantaneo di) rendimento* dell'azione A;
μ è il *rendimento atteso*; σ è la **volatilità**.

Quindi, nel modello standard:

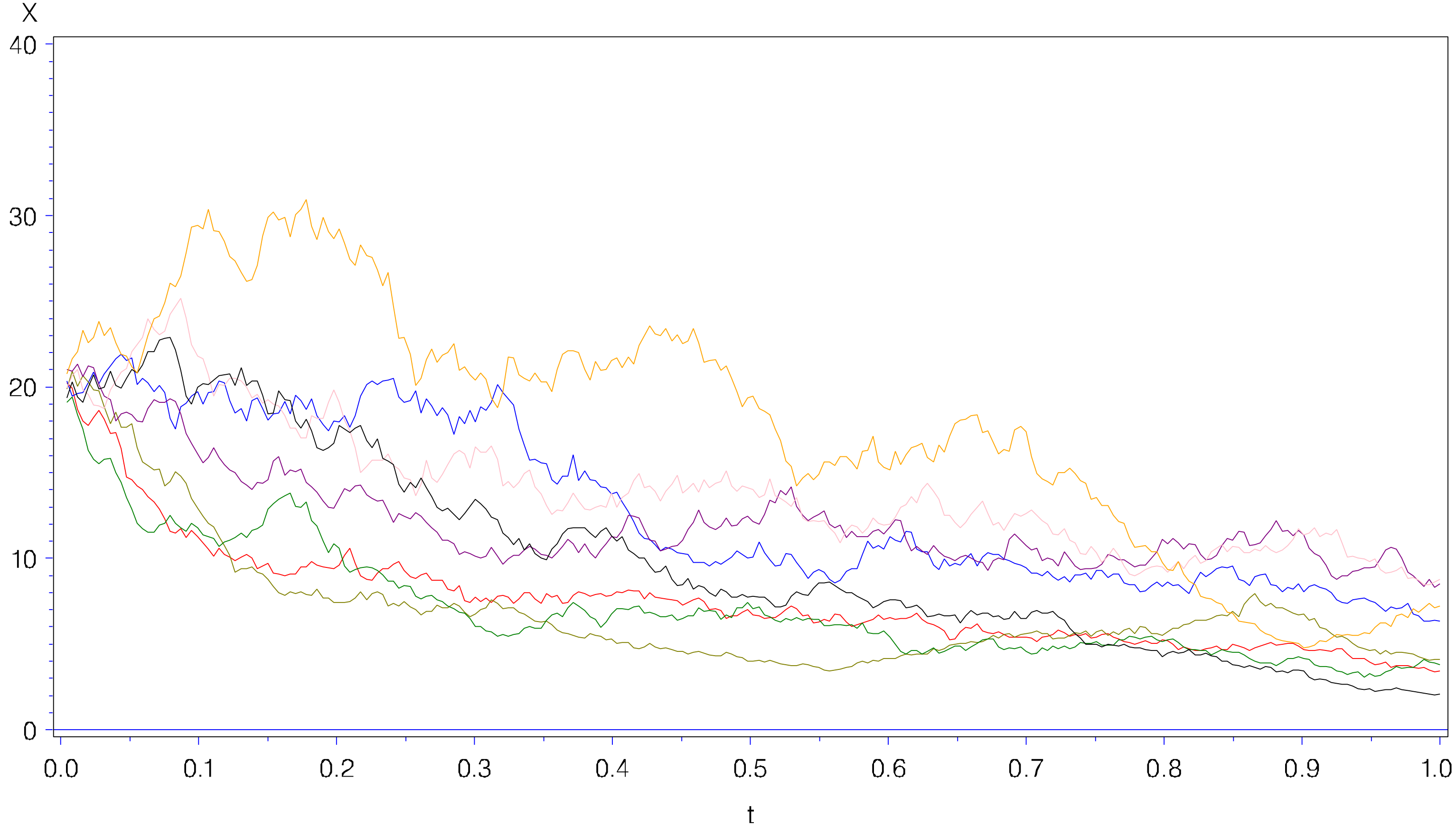
· i prezzi sono lognormali, e markoviani;

· i rendimenti sono normali, e indipendenti.

Esempio di simulazione. Dalla serie storica FIAT 6/11/2007-2008:

$$X_0 = 20.78\,, \quad \mu = -1.195 \;\; (\text{incr.}= -70\%) \;\; , \quad \sigma = 0.55\,.$$

Modello lognormale



Processi di diffusione

Il MBL e il MBG sono casi particolari di *processi di diffusione*, caratterizzati dall'eds:

$$dX(t) = a\big(X(t), t\big)\, dt + b\big(X(t), t\big)\, dB(t)$$

$\cdot\, a\big(X(t), t\big)$: coefficiente di drift,
$\cdot\, b^2\big(X(t), t\big)$: coefficiente di diffusione.

I processi di diffusione sono:

processi di Markov con traiettorie continue.

• Si consideri il processo:

$$Y(t) = f\big(X(t), t\big)\,,$$

con $f(x, t)$ funzione reale deterministica.
Il calcolo differenziale stocastico consente di descrivere la dinamica di Y a partire da quella di X (e quindi da quella di B).

Il lemma di Ito

- **Il teorema del differenziale totale**

Se $y = f(x,t)$ e $dx = a\,dt + b\,dz$, allora:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a\,\frac{\partial f}{\partial x}\right)\,dt + b\,\frac{\partial f}{\partial x}\,dz\,.$$

- **Il differenziale totale in ambito stocastico** (lemma di Ito)

Se $Y = f(X,t)$ e $dX = a\,dt + b\,dB$, si ha:

$$\begin{aligned} dY &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\,b^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\right)\,dt + \frac{\partial f}{\partial X}\,dX \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a\,\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2}\,b^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\right)\,dt + b\,\frac{\partial f}{\partial X}\,dB\,. \end{aligned}$$

Ma perché interessa considerare funzioni di $X(t)$?

2. Un contratto derivato

- Sia $X(t)$ il prezzo di un'azione A che non paga dividendi ($X(t)$ è un MBG), e sia, per es., $X(0) = 100$.
- Si consideri un *contratto derivato* D, che paga in $t = 1$ anno l'importo:

$$Y(1) = \max\left\{X(1), 100\right\}.$$

$\longrightarrow$ Come si può fissare il **prezzo** $Y(0)$ **del derivato**?

Per la markovianità di $X(t)$ deve essere $Y(0) = f\big(X(0)\big)$.

Esistono delle **regole di coerenza** che pongono limitazioni su $Y(0)$.

Per es., se in $t = 0$ si investe 100 sull'azione, in $t = 1$ si avrà $X(1)$. Quindi deve essere $Y(0) \geq 100$, perché il derivato garantisce *almeno* $X(1)$.

Regole di coerenza $\longrightarrow$ **principio di esclusione di arbitraggi non rischiosi**:
Principio di Arbitraggio

Principio di Arbitraggio (PA)

Non si possono generare importi certi con un investimento nullo

Non esistono *money pump*

Non sono consentiti *free lunch*

Investimenti non rischiosi

L'azione A fornisce un'opportunità di investimento rischiosa, perché il suo valore futuro $X(t)$ è una v.a.

- Si supponga che si possa anche investire senza rischio a un "tasso di interesse" r. Investendo $W(0)$ in $t = 0$, si avrà con certezza in $t \geq 0$:

  $$W(t) = W(0)\, e^{r\,t}\,.$$

  Si può anche dire che il valore in $t = 0$ di $W(t)$ Euro sicuri in t è :

  $$W(0) = W(t)\; e^{-r\,t}$$

  ($W(0)$ è il valore attuale di $W(t)$; $e^{-r\,t}$ è il fattore di sconto).

  In termini differenziali, vale la dinamica deterministica:

  $$dW(t) = r\,W(t)\,dt\,.$$

Arbitrage Pricing

• Per il prezzo dell'azione (il "sottostante") si ha:

$$dX(t) = \mu\, X(t)\, dt + \sigma\, X(t)\, dB(t)\,.$$

• Per il prezzo del derivato deve aversi: $Y(t) = Y\big(X(t), t\big)$ (per la markovianità).
Quindi deve essere:

$$dY(t) = a_Y\, dt + b_Y\, dB(t)\,,$$

dove la forma delle funzioni a_Y e b_Y è data dal lemma di Ito.

• *Argomentazione di hedging*:
Si costituisca un "portafoglio" contenente 1 unità di D e α unità di A.

· Il valore del portafoglio è: $W(t) = Y(t) + \alpha\, X(t)$.

· Si ha:

$$dW = (a_Y + \alpha\, \mu\, X)\, dt + (b_Y + \alpha\, \sigma\, X)\, dB\,.$$

· Sia $\alpha^* = -b_Y/(\sigma\, X)$. Per $\alpha = \alpha^*$ la componente rischiosa si annulla.

· Per $\alpha = \alpha^*$ si ha:

$$dW^* = (a_Y + \alpha^* \, \mu \, X) \, dt \, .$$

· Per il PA deve allora essere:

$$dW^* = W^* \, r \, dt \, .$$

$\Longrightarrow$

Utilizzando la forma esplicita di a_Y e b_Y questa equazione equivale alla:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + r X \frac{\partial Y}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t} = r \, X \, . \tag{1}$$

$\longleftarrow$ *equazione generale di valutazione.*

E.d. alle derivate parziali di tipo parabolico, che va risolta specificando le condizioni al contorno che caratterizzano D.

Nel nostro caso la c.c. (condizione a scadenza) è :

$$Y(T) = \max \left\{ X(T), K \right\} , \tag{2}$$

con $T = 1$ anno e $K = 100$ Euro.

L'equazione generale di valutazione (e.g.v.)

$$\frac{1}{2}\,\sigma^2 X^2\,\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + r X\,\frac{\partial Y}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t} = r\,X\,.$$

· Per $r = 0$ la e.g.v. corrisponde all'**equazione del calore**. ($\longrightarrow$)

· La e.g.v. è nota come *equazione backward di Kolmogoroff*. La sua "duale" è l'equazione forward di Kolmogoroff, o *equazione di Fokker-Planck*. ($\longrightarrow$)

· In finanza la e.g.v. è l'**equazione di Black e Scholes** (1973).

Osservazione. Il rendimento atteso μ non entra nella valutazione! Al suo posto compare r.

"*We were both amazed that the expected rate of return on the underlying stock did not appear in the differential equation*". [BS, 1998]

L'equazione del calore in una dimensione

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{k}{c\,\rho}\,\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\,,$$

dove:

· $f = f(X,t)$ è la temperatura come funzione dello spazio X e del tempo t,

· k è la conduttività termica,

· c è la capacità termica specifica,

· ρ è la densità del materiale.

Ponendo $r = 0$ nella e.g.v.:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\,\sigma^2 X^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\,.$$

L'equazione di Fokker-Planck

- Equazione backward di Kolmogoroff:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a\,\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2}\,b^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\,,$$

dove:

· $f = f(X,t)$ è la densità di probabilità della posizione X di una particella,

· $a = a(X,t)$ è il coefficiente di drift,

· $b^2 = b^2(X,t)$ è il coefficiente di diffusione.

La e.g.v. si ottiene ponendo $a = rX$ e $b = \sigma X$ e aggiungendo il termine lineare rX ("killing function").

- Equazione forward di Kolmogoroff, o equazione di Fokker-Planck:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial X}\,(a\,f) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial X^2}\,(b^2\,f)\,.$$

(cfr. anche la *dinamica di Langevin*).

L'espressione del prezzo

Sotto la condizione $Y(T) = \max\big\{X(T), K\big\}$, l'e.g.v. ha soluzione esplicita:

$$Y(0) = X(0)\, N(d_1) + K\, e^{-r\,T}\, N(d_2)\,, \tag{3}$$

con:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du\,,$$

$$d_1 = \frac{\log[X(0)/K] + r\,T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\,\sigma\sqrt{T}\,, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}\,.$$

È la **formula di Black e Scholes**.

"*Probably the most frequently used formula with embedded probabilities in the human history.*" [Rubinstein, 1999]

- La calcolatrice Texas Instruments.

Nel nostro esempio:

Assumendo $r = 0.04$, essendo $\sigma = 0.55$, $K = X_0 = 100$ e $T = 1$, si ha:

$e^{-rT} = 0.96\,, \quad d_1 = 0.34773\,, \quad d_2 = -0.20227\,, \quad N(d_1) = 0.63598\,, \quad N(d_2) = 0.41985\,,$

e quindi: $Y(0) = \mathbf{119.34}$ Euro.

Dalla proprietà elementare $\max\{x,k\} = x + \max\{k-x, 0\}$ si ha:

$$Y(1) = \max\left\{X(1), 100\right\} = X(1) + P(1)\,,$$

con:

$$P(1) = \max\left\{100 - X(1), 0\right\}.$$

Quindi:

$$Y(0) = \max\left\{X(1), 100\right\} = X(0) + P(0) = 100 + \mathbf{19.34}\,.$$

Il contratto P è un'**opzione put** (diritto a vendere A in $T = 1$ al prezzo $K = 100$).

L'espressione in forma integrale

Esiste una espressione generale (in forma integrale) del problema (1) + (2):

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\,\sigma^2 X^2 \,\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} + r\,X\,\frac{\partial Y}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t} = r\,X \\ Y(T) = \max\big\{X(T), K\big\} \end{cases}$$

Vale la **formula di Feynman-Kac**:

$$Y(0) = e^{-r\,T} \int_0^{+\infty} \max\{x, K\}\,\varphi_T^*(x)\,dx \tag{4}$$

dove $\varphi_T^*(x)$ è la densità di probabilità lognormale con parametri $r\,T$ e $\sigma^2\,T$.

Si può anche scrivere:

$$Y(0) = e^{-r\,T}\,\mathbf{E}^*\big[Y(T)\big] \tag{5}$$

dove $\mathbf{E}^*$ rappresenta il **valore atteso** (*expectation*) di $Y(T)$ calcolato secondo la densità di probabilità $\varphi_T^*(x)$ (*probabilità risk-neutral*).

3. Un modello per i prezzi nel tempo discreto

Nel generico intervallo di tempo $[k, k+1]$:

· Azione A: in k ha prezzo X, in $k+1$ ha prezzo $u\,X$ oppure $d\,X$
(u e d parametri noti, con $d < u$)

· Derivato D: in $k+1$ ha prezzo $Y_u = \max\{uX,\ K\}$ oppure $Y_d = \max\{dX, K\}$
(K è fissato; il prezzo Y in k di D è da ricavare)

· Si può investire senza rischio al tasso i: W in k varrà $(1+i)\,W$ in $k+1$
(ponendo $m = 1+i$, deve essere: $d < m < u$)

Argomentazione di hedging:
Se in k si può costruire un portafoglio:

$$Z = W + \alpha\,X\,, \tag{6}$$

che **replica** D, cioè che in $k+1$ ha valore:

$$Z_u = Y_u \quad \text{oppure} \quad Z_d = Y_d\,, \tag{7}$$

per il PA deve essere $Y = Z$.

$k \qquad k+1$

$$X \begin{cases} u\,X & \text{con probabilità } p \\ d\,X & \text{con probabilità } 1-p \end{cases}$$

$$Y \begin{cases} Y_u = \max\{uX,\ K\} & \text{con probabilità } p \\ Y_d = \max\{dX,\ K\} & \text{con probabilità } 1-p \end{cases}$$

Le condizioni $Z_u = Y_u$ e $Z_d = Y_d$ equivalgono alle:

$$\begin{cases} m\,W + \alpha\,u\,X + = Y_u\,, \\ m\,W + \alpha\,d\,X + = Y_d\,, \end{cases} \tag{8}$$

da cui si ricava:

$$\alpha = \frac{Y_u - Y_d}{(u-d)\,X}\,, \qquad W = \frac{u\,Y_d - d\,Y_u}{(u-d)\,m}\,. \tag{9}$$

Quindi dalla $Z = W + \alpha\, X$ si ricava:

$$Y = \frac{1}{m}\Big[q\, Y_u + (1-q)\, Y_d\Big]\,,$$

avendo posto:

$$q = \frac{m-d}{u-d}\,.$$

Si ha cioè:

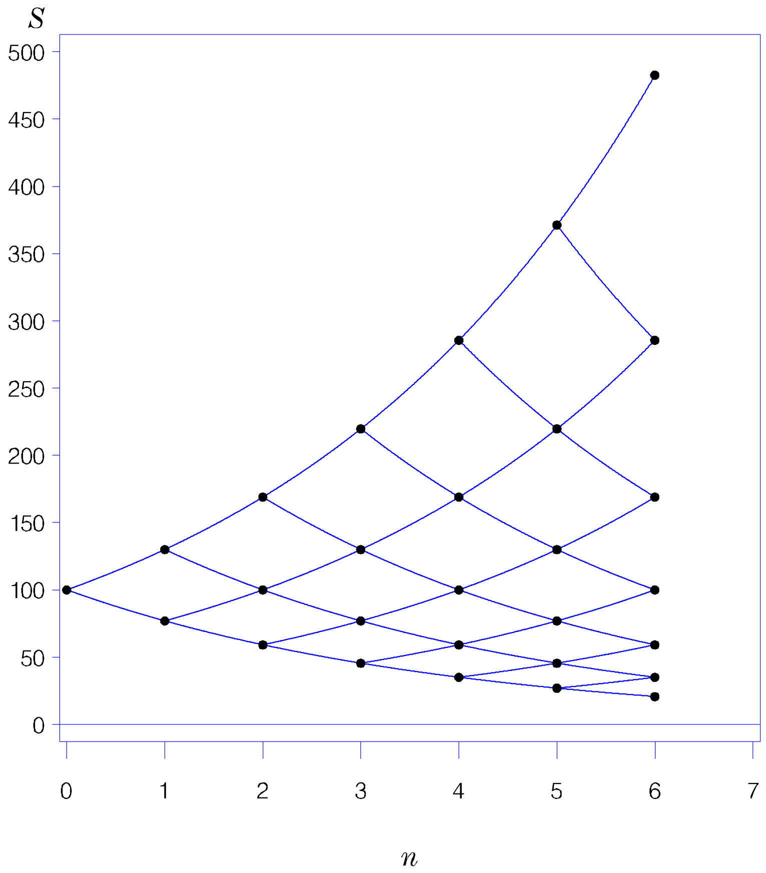
$$Y(0) = (1+i)^{-1}\,\mathbf{E}^*\big[Y(1)\big]$$

$\longrightarrow$ ancora la rappresentazione di Feynman-Kac!

Osservazione. La probabilità p non entra nella valutazione! Al suo posto compare q.

Estensione a n periodi

Si ottiene un processo stocastico sul reticolo binomiale moltiplicativo
$\longrightarrow$ *modello binomiale* di Cox, Ross e Rubinstein (1979).



Per il prezzo del derivato si ha la **formula binomiale**:

$$Y = \frac{1}{m^n} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^k \, (1-q)^{n-k} \, \max\left\{ u^k \, d^{n-k} \, X, \, K \right\} \right] ,$$

cioè ancora:

$$Y(0) = (1+i)^{-n} \, \mathbf{E}^* \big[Y(n) \big] \, .$$

Come si usa in pratica

Sia $Y(T) = \max\{X(T), \, K\}$. Si sceglie n "abbastanza grande" e si pone:

$$\Delta t = T/n \, , \quad m = e^{r \, \Delta t} \, , \quad u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}} \, , \quad d = 1/u \, .$$

- Se si passa al limite per $n \to \infty$?

Il limite continuo

Per $n \to \infty$:

- Con le scelte $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ e $d = 1/u$ si ottiene il **modello Black e Scholes**.

  $\longrightarrow$ Il modello CRR come approssimazione numerica del modello BS.

- Ma se si pone, per es.:

$$u = e^{a}\,, \quad d = e^{b\,\Delta t}\,, \quad q = \lambda\,\Delta t\,,$$

  si ottiene un modello basato su un **processo a salti** (per $a = 1$ e $b = 0$ processo di Poisson).

  ! Per salti di ampiezza aleatoria l'hedging argument non è più valido.

  ! La formula di Feynman-Kac non fornisce più l'espressione del prezzo.

  $\longrightarrow$ **teoria dei mercati incompleti**; **criteri aggiuntivi per il pricing**.

Quotazioni intraday FIAT – 6/11/2008